离散数学

第十二章: 递推方程与生成函数

卢杨

厦门大学信息学院计算机科学与技术系

luyang@xmu.edu.cn

厦門大學信息学院(特色化示范性软件学院)
School of Informatics Xiamen University (National Characteristic Demonstration Software School)

厦门大学 计算机科学与技术系
Department of Computer Science and Technology, Xiamen University

12.1 递推方程

递推方程

定义 12.1

给定一个数的序列$H(0), H(1), \ldots, H(n), \ldots$，简记为$\{H(n)\}$. 一个把$H(n)$和某些个$H(i), 0 \le i < n$, 联系起来的等式叫做关于序列$\{H(n)\}$的递推方程.

例 12.1 考虑数列1,1,2,3,5,8,13, ..., 从第3个数开始, 每一个数都等于前面相邻两个数之和. 若$f(n)$代表该数列的第n项, $n = 0,1, \ldots$,那么有

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2),$$
$$f(0) = 1,$$
$$f(1) = 1.$$

上述等式是关于斐波那契数列$f(n)$的递推方程和初值.

- 如何解该方程呢？能否将该方程使用一般的函数形式来表达？即$f(n)$只与n相关，而不是其他的$f(i)$.

特征方程的根

- 首先考虑常系数线性齐次递推方程的求解.

定义 12.2

$$H(n)-a_1H(n-1)-a_2H(n-2)-\cdots-a_kH(n-k)=0 \quad (12.1)$$

$$n\geq k, a_1, a_2, \dots, a_k\text{是常数}, a_k\neq 0$$

称为常系数线性齐次递推方程.

定义 12.3

$$x^k-a_1x^{k-1}-a_2x^{k-2}-\cdots-a_k=0$$

称为递推方程12.1的特征方程, 它的k个复数根$q_1, q_2, \dots, q_k$称为递推方程的特征根.

- 特征方程与递推方程中的$k+1$项一一对应.
- $a_k\neq 0$, 因此0不是特征根.

递推方程的解

定理 12.1

设q是非零复数, 则$H(n)=q^n$是递推方程12.1的一个解, 当且仅当q是它的特征根.

证明

$$
\begin{aligned}
& H(n)=q^n\text{是递推方程12.1的解} \\
\Leftrightarrow\ & q^n-a_1q^{n-1}-a_2q^{n-2}-\cdots-a_kq^{n-k}=0 \\
\Leftrightarrow\ & q^{n-k}\left(q^k-a_1q^{k-1}-a^2q^{k-2}-\cdots-a_k\right)=0 \\
\Leftrightarrow\ & q^k-a_1q^{k-1}-a_2q^{k-2}-\cdots-a_k=0\ (q\neq 0) \\
\Leftrightarrow\ & q\text{是递推方程12.1的特征根}
\end{aligned}
$$

斐波那契数列的解

- 斐波那契数列就这样解开了.
- 首先将其写成常系数线性齐次递推方程的形式:

$$f(n)-f(n-1)-f(n-2)=0$$

- 其对应的特征方程为:

$$x^2-x-1=0$$

- 通过韦达定理可得两个特征根为$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.
- 通过定理12.1可得$f(n)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$或 $f(n)=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

斐波那契数列的解

- 取其中一个 $f(n)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$, 让我们来验证一下:

$$f(0)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0=1$$

$$f(1)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$f(2)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$f(3)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3=2+\sqrt{5}$$

- 虽然满足了$f(n)=f(n-1)+f(n-2)$, 但是好像哪里不太对?

递推方程的解

定理 12.2

设$h_1(n)$和$h_2(n)$是递推方程12.1的两个解，c_1和c_2是任意常数，则$c_1h_1(n)+c_2h_2(n)$也是递推方程12.1的解.

推论

设$q_1,q_2,\ldots,q_k$是递推方程**不等的**特征根，且$c_1,c_2,\ldots,c_k$为任意常数，那么

$$H(n)=c_1q_1^n+c_2q_2^n+\cdots+c_kq_k^n$$

也是递推方程12.1的解.

递推方程的解

- 可以证明，递推方程12.1的每个解都是$c_1q_1^n+c_2q_2^n+\cdots+c_kq_k^n$的形式, 这样的解称为递推方程的通解.
- 给定递推方程的初值$H(0), H(1), \dots, H(k-1)$，由通解就可以唯一确定, 这样得到的解就是该递推方程在给定初值下的解.
- 也就是说，递推方程12.1有无数个解，但是在给定初值下的解是唯一的.

例 斐波那契数列$f(n)$的递推方程在初值$f(0)=1, f(1)=1$和$f(0)=2, f(1)=3$下的解是不同的. 虽然后者就不叫斐波那契数列了.

斐波那契数列的解

例 斐波那契数列的递推方程是:

$$f(n)-f(n-1)-f(n-2)=0.$$

该递推方程的特征方程是$x^2-x-1=0$, 特征根是

$$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

所以通解是

$$f(n)=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

斐波那契数列的解

代入初值$f(0) = 1, f(1) = 1$, 得到方程组

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} c_1 + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} c_2 = 1 \end{cases}$$

解得

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1+\sqrt{5}}{2}, c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

所以斐波那契数列的解是

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

递推方程的解

- 当递推方程的特征根有重根的时候，$H(n)=c_1q_1^n+c_2q_2^n+\cdots+c_kq_k^n$不是递推方程的通解.

定理 12.3

设$q_1,q_2,\ldots,q_t$是递推方程

$$H(n)-a_1H(n-1)-a_2H(n-2)-\cdots-a_kH(n-k)=0,\qquad n\geq k,a_k\neq 0$$

的不等的特征根，且q_i的重数是e_i, $i=1,2,\ldots,t$. 令$c_{i1},c_{i2},\ldots,c_{ie_i}$是任意常数，且

$$H_i(n)=\left(c_{i1}+c_{i2}n+\cdots+c_{ie_i}n^{(e_i-1)}\right)q_i^n$$

那么$H(n)=\sum_{i=1}^{t}H_i(n)$是递推方程的通解.

递推方程的解

例 12.3 若递推方程的特征方程是

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0,$$

它的特征根是$-1, -1, -1, 2$. 根据定理12.3, 该递推方程的通解是

$$H(n) = c_1(-1)^n + c_2 n(-1)^n + c_3 n^2(-1)^n + c_4 2^n$$

递推方程的解

下面考虑常系数线性非齐次递推方程, 它的一般形式是

$$H(n)-a_1H(n-1)-a_2H(n-2)-\cdots-a_kH(n-k)=f(n),$$
$$n\geq k, a_k\neq 0, f(n)\neq 0$$

定理 12.4

设$\overline{H}(n)$是常系数线性齐次递推方程

$$H(n)-a_1H(n-1)-a_2H(n-2)-\cdots-a_kH(n-k)=0,$$
$$n\geq k, a_k\neq 0$$

的通解, $H^*(n)$是其对应的非齐次递推方程的一个特解, 则

$$H(n)=\overline{H}(n)+H^*(n)$$

是该非齐次递推方程的通解.

递推方程的解

- 那么，常系数线性**非齐次**递推方程的**特解**该如何求呢？
- 一般特解的函数形式与$f(n)$有关.
- 例如，当$f(n)$是n的t次多项式时，一般情况下可以设特解$H^*(n)$也是n的t次多项式.

递推方程的解

例 12.4 求以下递推方程的一个特解

$$H(n)+5H(n-1)+6H(n-2)=3n^2$$

解 $f(n)$是2次多项式, 因此可设特解形式为

$$H^*(n)=q_1n^2+q_2n+q_3,$$

其中q_1, q_2, q_3为待定系数. 代入原式并化简后可得

$$12q_1n^2+(-34q_1+12q_2)n+(29q_1-17q_2+12q_3)=3n^2,$$

让每个多项式系数为0即可得到一组特解:

$$\begin{cases}12q_1=3\\ -34q_1+12q_2=0\\ 29q_1-17q_2+12q_3=0\end{cases}$$

解得$q_1=\frac{1}{4}, q_2=\frac{17}{24}, q_3=\frac{115}{288}$.

递推方程的解

- 设特解$H^*(n)$是n的t次多项式也有失败的时候.

例 12.5 求解递推方程的一个特解.

$$H(n) - H(n-1) = 7n.$$

解 $f(n)$是1次多项式, 因此可设特解形式为

$$H^*(n) = q_1 n + q_2,$$

代入原式并化简可得$q_1 = 7n$. 这里解不出q_1, 因为等式左边含n的项被消去了. 为此需要把特解中n的最高次幂提高, 例如设

$$H^*(n) = q_1 n^2 + q_2 n + q_3,$$

代入化简后得到

$$2q_1 n + q_2 - q_1 = 7n,$$

解得$q_1 = q_2 = \frac{7}{2}$.

例 12.6 汉诺塔问题

- 有A, B, C三根柱子. n个圆盘按照从大到小的顺序依次套在A柱上, 图中的$n=6$.
- 现在要把它们移到C柱上.
- 如果每次只允许移动一个盘子, 并且不允许大盘压在小盘上面, 设计一个移动的算法, 并计算算法的移动次数.

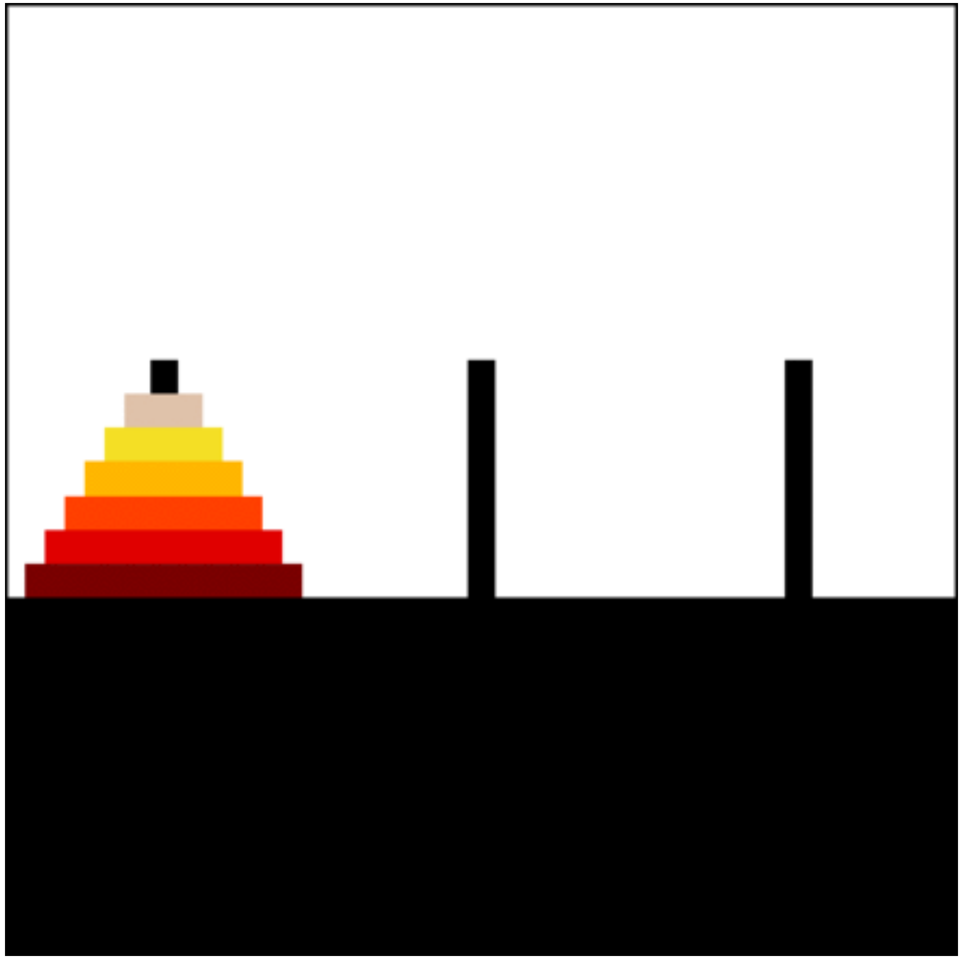


Image source: https://en.wikipedia.org/wiki/Tower_of_Hanoi

汉诺塔问题

- 可设计一个递归算法.
  - 令递归函数Hanoi(n, X, Y, Z)表示把n个盘子从X柱移动到Y柱, 中间可利用Z柱.
  - 令函数move(X, Y)表示把一个盘子从X柱移动到Y柱的操作.

```
function Hanoi(n, A, C, B)
  if n=1
    move(A, C)
  else
    Hanoi(n-1, A, B, C)
    move(A, C)
    Hanoi(n-1, B, C, A)
```

汉诺塔问题

- 于是可得到关于移动次数的递推方程:

$$T(n) = 2T(n-1) + 1, n > 1$$
$$T(1) = 1$$

- 这是一个常系数线性非齐次递推方程，首先求其对应的齐次递推方程$T(n) - 2T(n-1) = 0$的通解，即对应特征方程的特征根:

$$x - 2 = 0$$

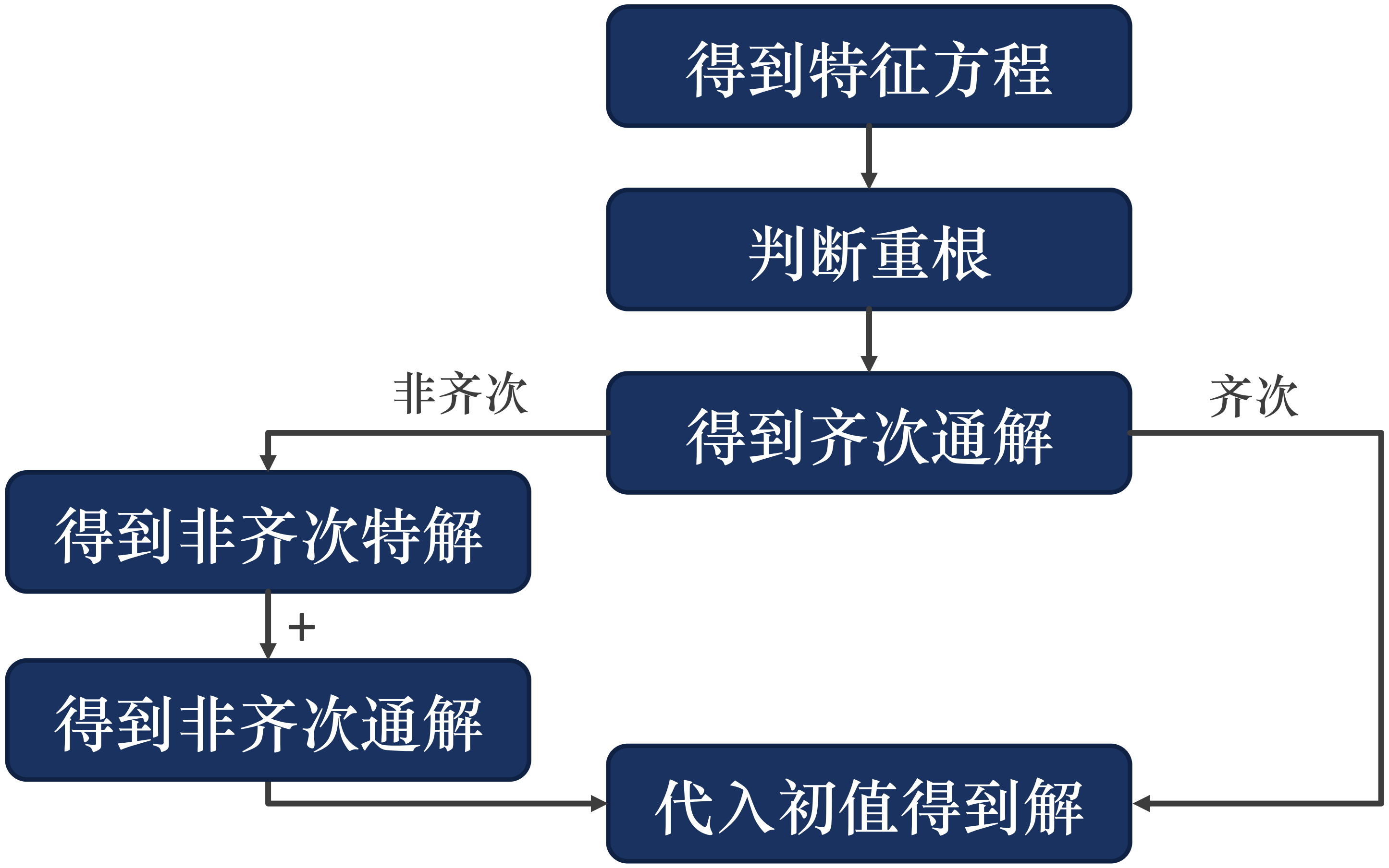
- 解得$x = 2$, 所以通解的形式为:

$$\bar{T}(n) = c2^n.$$

汉诺塔问题

- 根据定理12.4, 再求该非齐次方程的特解.
- 该方程为0次多项式, 可直接设特解形式为
$$T^*(n) = q.$$
- 代入可得
$$q = 2q + 1,$$
解得$q = -1$.
- 通过定理12.4可得该非齐次递推方程的通解为:
$$T(n) = \bar{T}(n) + T^*(n) = c2^n - 1.$$
- 代入初值$T(1) = 1$可确定常数$c = 1$, 从而得到
$$T(n) = 2^n - 1.$$

求解递推方程的通用步骤



课堂练习

求解递推方程

$$\begin{cases} H(n) + 6H(n-1) + 9H(n-2) = 3, \\ H(0) = 0, \\ H(1) = 1. \end{cases}$$

课堂练习

解

- 首先求对应的齐次递推方程的特征方程的解:

$$x^2+6x+9=0$$

解得$x_1=x_2=-3$, 有重根, 因此使用定理12.3, 齐次通解为

$$\overline{H}(n)=c_1(-3)^n+c_2n(-3)^n.$$

- 由于$f(n)=3$, 设特解$H^*(n)=q$, 代入后得到

$$q+6q+9q=3,$$

解得$H^*(n)=3/16$.

- 因此原递推方程的通解为

$$H(n)=\overline{H}(n)+H^*(n)=c_1(-3)^n+c_2n(-3)^n+\frac{3}{16}.$$

- 代入初值解得$c_1=-\frac{3}{16}, c_2=-\frac{1}{12}.$

12.2 生成函数与指数生成函数

生成函数

- 生成函数与数列有着密切的联系.
- 通过生成函数可以求解递推方程和组合计数问题.

定义 12.4

设$a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$是一个数列, 简记作$\{a_n\}$, 则

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

称为数列$\{a_n\}$的**生成函数**.

生成函数

例 设m为给定正整数, 组合数序列$\binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \dots, \binom{m}{n}, \dots$的生成函数是

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n = (1+x)^n,$$

正好是二项式定理的结果, 因为组合数恰好是二项式系数.

生成函数在组合计数中的应用

- 生成函数在组合计数中有着重要的应用.
- 考虑多重集$S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\dots,\infty\cdot a_k\}$, S的r组合数是$\binom{k+r-1}{r}$.
- 考虑多重集$S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\dots,n_k\cdot a_k\}$，如果$r\le n_1,n_2,\dots,n_k$, S的r组合数也是$\binom{k+r-1}{r}$.
- 若存在某个$n_i<r$，S的r组合数就无法使用计数公式,这时候就可以使用生成函数的方法求解.

生成函数在组合计数中的应用

- 考查以下函数

$$G(y)=(1+y+y^2+\cdots+y^{n_1})(1+y+y^2+\cdots+y^{n_2})\ldots(1+y+y^2+\cdots+y^{n_k}),$$

它展开后的的各项都是如下形式:

$$y^{x_1}y^{x_2}\ldots y^{x_k}=y^{x_1+x_2+\cdots+x_k}.$$

其中 y^{x_i}来自第i个因式$(1+y+y^2+\cdots+y^{n_i})$中的某一项.

- $x_1+x_2+\cdots+x_k=r$时，$G(y)$中y^r的系数是**该方程的非负整数解**，也就是我们想要的**r组合数**.
- 因此，通过这种方式构造的生成函数$G(y)$所对应的数列$\{a_r\}$就是r组合数的数列.

生成函数在组合计数中的应用

定理

设多重集$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$，对任意的非负整数$r$，令$a_r$为$S$的$r$组合数, 数列$\{a_r\}$的生成函数为$G(x)$, 则

$$G(x)=f_{n_1}(x)\cdot f_{n_2}(x)\cdot\cdots\cdot f_{n_k}(x),$$

其中

$$f_{n_i}(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{n_i},\qquad i=1,2,\ldots,k.$$

- 在这种构造下, $G(x)$可以写成以下形式:

$$G(x)=1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_rx^r+\cdots$$

生成函数在组合计数中的应用

例 12.11 求$S=\{3\cdot a,4\cdot b,5\cdot c\}$的3组合数和10组合数.

解

- 3组合数满足$3\le 3,4,5$的条件, 因此可以直接使用计数公式

$$\binom{3+3-1}{3}=10.$$

- 10组合数则需要使用生成函数. 设S的r组合数为a_r, $\{a_r\}$的生成函数是

$$\begin{aligned}G(y)&=(1+y+y^2+y^3)(1+y+y^2+y^3+y^4)\\&\quad(1+y+y^2+y^3+y^4+y^5)\\&=(1+2y+3y^2+4y^3+4y^4+3y^5+2y^6+y^7)\\&\quad(1+y+y^2+y^3+y^4+y^5)\end{aligned}$$

- 上式中y^{10}的系数为$3+2+1=6$, 所以$a_r=6$.

生成函数在组合计数中的应用

- 对于多重集$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \dots, n_k\cdot a_k\}$的$r$排列数，只有当$r=n_1+n_2+\cdots+n_k$时有全排列的计数公式

$$\binom{r}{n_1 n_2 \dots n_k}$$

- 对于不满足该条件的一般r排列的计数，就需要用到指数生成函数.

定义 12.6

设$a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$是一个数列，简记作$\{a_n\}$，它的指数生成函数记作$G_e(x)$，且

$$G_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

生成函数在组合计数中的应用

定理 12.6

设多重集$S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\dots,n_k\cdot a_k\}$, 对任意的非负整数$r$, 令$a_r$为$S$的$r$排列数, 数列$\{a_r\}$的指数生成函数为$G_e(x)$, 则

$$G_e(x)=f_{n_1}(x)\cdot f_{n_2}(x)\cdot\dots\cdot f_{n_k}(x),$$

其中

$$f_{n_i}(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^{n_i}}{n_i!},\qquad i=1,2,\dots,k.$$

- 在这种构造下, $G_e(x)$可以写成以下形式:

$$G_e(x)=1+a_1x+a_2\frac{x^2}{2!}+a_3\frac{x^3}{3!}+\dots+a_r\frac{x^r}{r!}+\cdots$$

生成函数在组合计数中的应用

例 12.4 求$S=\{2\cdot a, 3\cdot b\}$的5排列数, 4排列数.

解

- 5排列数满足$2+3=5$的条件, 因此可以直接使用计数公式

$$\binom{5}{2\ 3}=\frac{5!}{2!\,3!}=10.$$

- 设S的排列数为a_r, $\{a_r\}$的指数生成函数是

$$G_e(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)$$

$$=1+2x+4\cdot\frac{x^2}{2!}+7\cdot\frac{x^3}{3!}+10\cdot\frac{x^4}{4!}+10\cdot\frac{x^5}{5!}$$

因此有$a_4=10$, 同时也可以验证$a_5=10$.

多重集组合计数小结

排列:

- 如果 $n_i \geq r$, r排列数为k^r.
- 如果 $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ ，全排列数为$\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_k}$.
- 对任意的非负整数r, r排列数可以使用指数生成函数求解.

组合:

- 如 果 $n_i \geq r$ ， r 组 合 数 是 $\binom{k+r-1}{r}$.
- 对任意的非负整数r, r组合数可以使用生成函数求解.

课堂练习

用多重集{1,1,2,3,3,4}中的数字能构成多少个不同的四位数?

课堂练习

用多重集{1,1,2,3,3,4}中的数字能构成多少个不同的四位数?

解 所求的四位数是多重集$S=\{2\cdot 1,1\cdot 2,2\cdot 3,1\cdot 4\}$的4排列.

- 设S的排列数为为a_r, $\{a_r\}$的指数生成函数是

$$G_e(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)(1+x)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)(1+x)$$

$$=\left(1+x+x+x^2+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{2!}\right)^2$$

$$=\left(1+2x+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3\right)^2$$

课堂练习

- 不需要全部算出来, 找出$\frac{x^4}{4!}$的系数即可:

$$2 \cdot 2x \cdot \frac{x^3}{2} + \frac{3}{2}x^2 \cdot \frac{3}{2}x^2$$

- x^4的系数是$2 + \frac{9}{4} = \frac{17}{4}$.
- 所以 $\frac{x^4}{4!}$的系数是 $\frac{17}{4} \cdot 4! = 102$.
- 可以和例11.5的方法进行对比.

课堂练习

游戏绝地求生中有头盔和防弹衣, 分别分为3个等级:

- 头盔: 一级头, 二级头, 三级头.
- 护甲: 一级甲, 二级甲, 三级甲.

在游戏中一开始什么都没有, 但是会在路上随机捡取装备. 假设规定高级装备可以覆盖低级装备, 也可以直接穿上, 但是穿上高级装备后就无法再穿回低级装备. 那么从什么都没有, 到穿上三级头和三级甲, 一共有多少种方式?

例如

- 一级头->二级甲->三级甲->三级头
- 三级头->三级甲
- …

Image source: http://k.sina.com.cn/article_5944198308_1624d44a400100aa8r.html

课堂练习

- 如果只考虑头盔, 那么穿上i级头有2^{i-1}种方式. 因为i级头一定要穿上, 但是$1, \dots i-1$级头都可以选择穿与不穿.
- 当穿上i级头和j级甲时, 可以分解为两种情况:
  - 已经穿上j级甲了, 就差i级头了, 这时候捡到i级头了.
  - 已经穿上i级头了, 就差j级甲了, 这时候捡到j级甲了.
- 因此, 假设$H(i,j)$为穿上i级头和j级甲的方式数, 该问题的递推方程可以写为:

$$H(i,j) = \sum_{k<i} H(k,j) + \sum_{k<j} H(i,k)\,, i > 0, j > 0$$

$$H(i,j) = 2^{i-1}, i = 0 \text{或} j = 0$$

课堂练习

	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$j=0$	0	1	2	4
$j=1$	1	2	5	12
$j=2$	2	5	14	37
$j=3$	4	12	37	106

作业

p204

1

4

5

7

11

16

p222

1 (1)(3)

3

8

13

17

谢谢

有问题欢迎随时跟我讨论